**第1讲 不等式及其解集和性质**

**一、课程目标**

1.了解不等式的概念

2.了解不等式的解与解集

3.学会用数轴表示不等式的解集

4、掌握不等式的性质

**二、课程内容**

**知识点一 不等式**

**1.定义:**用**不等号**表示**不等关系**的式子叫做不等式.

**注：**(1)不等式表示式子之间的不等关系，与方程表示的相等关系相对应；

(2)判断一个式子是否为不等式,关键是看所给式子是否含不等号；

(3)对于含有未知数的不等式,当未知数取某些值时,不等式的左右两边符合不等号所表示的大小关系，我们就说不等式成立，否则不等式不成立.

**2.基本的表达形式:**

**(1)常见的不等号:**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 符号 | 名称 | 实际意义 | 读法 | 举例 |
|  | 小于号 | 小于、不足 | 小于 |  |
|  | 大于号 | 大于、高出 | 大于 |  |
|  | 小于或等于号 | 不大于、不超过、至多 | 小于或等于 |  |
|  | 大于或等于号 | 不小于、不低于、至少 | 大于或等于 |  |
|  | 不等于号 | 不相等 | 不等于 |  |

**(2)常见的不等式基本语言与符号表示:**  
①是正数表示为,是负数表示为 ；  
②是非负数表示为,是非正数表示为 ；  
③，同号表示 ；，异号表示为 .

**题型一 利用不等式的定义识别不等式**

**例1-1** 下列式子中，是不等式的有（　　）  
① ；② ；③ ；④ ；⑤ ；⑥ ．

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| A．个 | B．个 | C．个 | D．个 |

【思路分析】要依据不等式的定义--用“”、“”、“”、“”、“”不等号表示不相等关系的式子是不等式，来判断．

【解】①是等式；②是多项式；③是不等式；④是不等式；⑤是不等式；⑥是不等式，  
故选B

【总结提示】本题考查不等式的定义，一般地，用不等号表示不相等关系的式子叫做不等式．解答此类题关键是要识别常见不等号：、、、、．

**配套练习1-1**

在式子， ，，，，中，是不等式的有（　　）

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| A．个 | B．个 | C．个 | D．个 |

答案：C．

**题型二 利用不等关系列不等式**

**例1-2** 列不等式：

1. 与的和是正数： .
2. 与的和小于： .
3. 与的差大于： .
4. 的倍小于： .
5. 的三分之一大于： .

【思路分析】根据题中语言叙述体现的数量关系列出式子，然后结合体现不等关系的关键字列出不等式.

【答】(1);(2);(3);(4);(5) .

【总结提示】列不等式首先要找出表示不等关系的关键词,然后用表示数量关系的式子表示不等式的左边和右边.

**配套练习1-2**

用不等式表示：

（1）与的倍的和是正数 .

6+3x＞0

（2）的倍不大于 .5a≤2

（3）的一半与的差是负数 .y-5＜0

（4）的倍与的和不小于 .7a+b≥15

．

答案：；；； ．

**知识点二 （难点）不等式的解（集）与解不等式**

**l.不等式的解:**使不等式成立的**未知数的值**叫做不等式的解.

**注:**判断一个数是否为不等式的解,就是将这个数代入不等式的左右两边，看不等式是否成立，若成立，则该数就是不等式的**一个解**；若不成立,则该数就不是不等式的解.

**2.不等式的解集:**

(1)**定义:**一般地，一个含有未知数的不等式的**所有的解**，组成这个不等式的解集.  
(2)**不等式的解集必须符合两个条件:**①解集中的每一个数值都能使不等式成立;  
②能够使不等式成立的所有数值都在解集中  
(3)不等式的解与不等式的解集的关系:解集包括解,所有的解组成解集.  
**3.解不等式:**求不等式的解集的过程叫做解不等式.

**题型一 利用不等式的解的定义找解**

**例2-1** 下列各数中，是不等式解的数有哪些？哪些不是不等式的解？  
、、、.

【思路分析】判断一个数是不是不等式的解，一般方法是将该数代入不等式，验证不等式是否成立.

【解】把代入不等式，得，即，不成立；

同理：将、、分别代入不等式，可知不成立；成立；成立.

所以、不是不等式的解，、是不等式的解.

【总结提示】解决此类问题通常采用“代入法”进行验证，将未知教的值代入不等式，若不等式成立，则该值是不等式的解;若不等式不成立，则该值不是不等式的解.

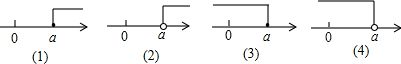
**配套练习2-1**

下列各数中，哪些是不等式的解？哪些是不等式的解？  
，，，，，，，.．

答案：，，5.1是不等式的解；，是不等式的解．

**知识点三 不等式的解集的表示方法**

**1.用最简单的不等式表示:**一般地，一个含有未知数的不等式有无数个解,其解集是一个范围,这个范围可用最简单的不等式来表示，如:不等式的解集为.  
**2.用数轴表示:**可以在数轴上标出某一区间直观地表示不等式的解集,其中的点对应的数值都是不等式的解.如图



**注:**(1)在图中,在表示的点上画空心圆圈,表示不包括这一点，在表示的点上画实心圆圈,表示包括这一点.  
(2)在数轴上表示不等式的解集时,要先确定边界点,再确定方向.确定方向的原则是“大于向右画，小于向左画”.

**题型一 用数轴表示不等式的解集**

**例3-1** 在数轴上表示下列不等式的解集：

在数轴上表示下列不等式的解集：  
（1）   
（2）   
（3） ．

【思路分析】根据不等式的解集在数轴上表示方法可画出图示．

【解】（1）如图所示：  
；  
  
（2）如图所示：  
；  
  
（3）如图所示：  
．

【总结提示】本题考查了在数轴上表示不等式的解集，不等式的解集在数轴上表示出来的方法：“”空心圆点向右画折线，“”实心圆点向右画折线，“”空心圆点向左画折线，“”实心圆点向左画折线．

**配套练习3-1**

在数轴上表示下列不等式的解集．  
（1）     （2）

【解】（1）；

（2）.

**题型二 利用不等式的特殊解确定字母的取值范围**

**例3-2** 已知不等式 的正整数解恰是，，，求的取值范围．

【思路分析】先解不等式，再画出数轴即可直观解答．

【解】 ，  
移项得，，  
系数化为1得， ．  
∵不等式的正整数解恰是，，，  
∴ ，  
∴当，即时，不等式的正整数解恰是，，．  
故a的取值范围是．

【总结提示】已知不等式的特殊解确定字母的取值范围时，因为特殊解有限，所以该字母的范围一定是在某一区间内,最关键是包不包括端点的问题，为了防止错误，可以把包括和不包括分情况讨论.

**配套练习3-2**

1.关于的不等式恰有两个负整数解，则b的取值范围是（　　）

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| A． | B． | C． | D． |

答案：B

**知识点四 不等式性质**

**1.性质1:**不等式两边加(或减)**同一个数**(或式子),不等号的方向**不变**;即如果,那么.  
**2.性质2:**不等式两边乘(或除以)同一个正数,不等号的方向不变;即如果,,那么或.  
**3.性质3:**不等式两边乘(或除以)同一个负数,不等号的方向改变;即如果, ,那么或.  
**注:**  
(1)运用不等式的性质时,不等号两边是同时变形，**同样**变形;

(2)运用不等式的性质可将不等式化为简单形式，从而求出不等式的解集;  
(3)运用不等式的性质对不等式进行变形时,要特别注意性质2与性质3的区别,在乘(或除以)同一个数时,先要分清这个数是正数还是负数,其次判断不等号方向是否要改变.  
(4)**不等式性质与等式性质的关系:  
联系:**不等式两边加(或减)**同一个数**(或式子)、乘(或除以)**同一个正数**,不等号的方向不变;而等式两边加(或减)**同一个数**(或式子)、乘(或除以)同一个正数，结果仍相等.  
**区别:**对于等式来说，两边乘(或除以)**同一个负数**，结果仍相等;而对于不等式来说，两边乘(或除以)**同一个负数**时，不等号的方向要改变.

**题型一 利用不等式的性质识别变形**

**例4-1** 若 ，则下列式子：（1）；（2）；（3）；（4）中，正确的有（　　）

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| A．个 | B．个 | C．个 | D．个 |

【思路分析】根据不等式的性质分析判断．

【解】(1)∵，∴，而,∴ (正确);

(2) ,即, ,∴(正确);

(3)∵，∴, ，∴(正确);

(4) ,即, , 两边除以,得，即∴(4)错误。

故选C．

【总结提示】(1)**由一个不等式变形到另一个不等式的方法:**先判断出第二个不等式是由第一个不等式经过怎样的变形得到的，再确定出每一步变形的依据，最后确定不等号是否改变方向.

(2)对于判断从一个不等式变形到另一个不等式正确与否，我们可以采用**数值验证法**来解符合第一个不等式条件的数值，代入另一个不等式进行验证，看它正确与否进行判断；本例可以取, 对每个式子分别进行验证.

**配套练习4-1**

1. (易错题)若，则下列不等式中成立的是（　　）

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| A． | B． | C． | D． |

答案：D

**题型二 利用不等式的性质确定字母常数的范围**

**例4-2** 若 的解集为，则的取值范围是（　　）

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| A． | B． | C． | D． |

【思路分析】从变形到,是将不等式两边同时除以并且改变了不等号的方向，说明不等式两边同时除以了同一个负数,即为负数.

【解】∵的解集为，  
∴ ，  
解得：，  
故选B

【总结提示】判断不等式两边乘(或除以)的同一个数的符号时，只需看不等号的方向是否改变,若不变，则这个数为正数；若改变，则这个数为负数.

**配套练习4-2**

（中考真题）关于的一元一次不等式的解集为，则的值为（　　）

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| A． | B． | C． | D． |

答案：D

**题型三 利用不等式的性质解简单不等式**

**例4-3** 利用不等式的性质解下列不等式，并在数轴上表示解集．  
（1） ；  
（2） ．

【思路分析】解不等式，就是借助不等式的性质使不等式逐步化为或（为常数）的形式.

【解】（1）不等式的两边同时乘以得，．  
在数轴上表示为：  
  
  
（2）不等式的两边同时减去得，，  
两边同时除以得，．  
在数轴上表示为：

【总结提示】利用不等式的性质1可简化为“移项”;利用不等式的性质2或性质3就是把未知数的系数化为1,要注意不等式两边乘( 或除以)同一个负数时，不等号要改变方向.

**配套练习4-3**

利用不等式的性质解下列不等式，并把解集在数轴上表示出来．  
（1）．  
（2）．  
（3）．

【解】（1）移项合并得：，  
解得：，  
；  
（2）移项合并得：，  
解得：，  
；  
（3）去括号得：，  
移项合并得：，  
解得：，  
．

**题型四 利用不等式的性质解决实际问题**

**例4-4** 战士张华要完成一个工程，需要进行爆破作业，为保证安全，点燃导火线的人应在爆破前至少离开爆破点远，若导火线燃烧的速度是，人离开的速度是，为保证张华的安全，导火线至少需要  ．

【思路分析】设导火线的长度至少需要，根据导火线燃烧速度是，人离开的速度是，到以外的安全区域可列不等式求解．

【解】设导火线的长度需要，根据题意得出：

，  
解得：，  
故导火线的长度至少需要．  
故答案为：20．

【总结提示】(1)利用不等式解决实际问题时，其关键是寻找能体现全题的不等关系，建立不等式模型，即列出不等式;

(2)列不等式时，要注意列的不等式是否包含等号;

(3)求出不等式的解集后，确定实际问题的解时，往往是先求出取值范围，然后再取符合取值范围的解;

(4)实际问题的解，需要满足两个要求，一是满足不等式，二是要满足实际情况.

**配套练习4-4**

一次奥运知识竞赛中,一共有25道题,答对一题得10分,答错(或不答)一题扣5分.设小明同学在这次竞赛中答对道题.  
(1)根据所给条件,完成下表:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 答题情况 | 答对 | 答错或不答 |
| 题数 |  |  |
| 每题分值 |  |  |
| 得分 |  |  |

(2)若小明同学的竞赛成绩超过100分,则他至少答对几道题?

解:(1)补全表格:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 答题情况 | 答对 | 答错或不答 |
| 题数 |  |  |
| 每题分值 |  |  |
| 得分 |  |  |

(2)根据题意,得,即，  
计算得出.  
的最小正整数解是.  
答:小明同学至少答对道题.

**题型五 解含字母常数的不等式**

**例4-5** 已知关于的不等式 的解集为，求关于的不等式的解集.

【思路分析】不等式去括号,移项合并,表示出解集,根据已知解集确定出与的值,即可求出所求不等式的解集.

【解】不等式移项得:，   
由不等式的解集为,得到 ,且 ,  
整理得: ,且 ,即 ,  
当 时,不等式 变形得: ;  
当 时,不等式 变形得: .

【总结提示】解题时要充分挖掘题中的已知条件,包括隐含的条件,如确定的取值范围(正负性)之后,才能正确解决本题.

**配套练习4-5**

关于的不等式的解集为 ,试求关于的不等式的解集．

【解】关于的不等式的解集为,得  
  
 且  
. 代入中，得，即

将代入中得，  
又∵ ,  
 ,即  
不等式的解集为.